現代数学の道標 *)

昭和45年度前期始業講演要旨（文理学部）

静　間　良　次

Transmutarsi nella propria mente di natura
自然の知性そのものに変らざるをえず
レオナルド・ダ・ヴィンチ

新しい学年を迎えるにあたって，1884年にソニア・コヴァレフスカヤがストックホルム大学講師として始めて教壇に立ったときの冒頭の言葉をかかげて，この偉大な女流数学者に敬意を表したいと思います。

「みなさん，人類に自然法則の認識への道をひらいてくれるあらゆる科学の中で，最も強力で最も偉大な科学は数学です。」

*　*　*

*) 本稿は1970年4月27日に行われた始業構演にもとずき，これに多少加筆したものです。

1

数学という学問ほど，その本質を誤解されている学問はないように思います。殊にわが国では，科学が科学思想と全く隔絶したところで安易に技術として導入されたため，数学は計算技術の研究と練磨を目的とするものだという偏見がひろく行われています。

数学はあたかもファウストの中の美女ヘレナのように，大層ほめられもし，けなされもした（bewundert viel und viel gescholten）学問で，万華鏡のように時代とともにさまざまの外観を示してきたのです。その半面には，このように複雑なうちにも，何かしら内面的な統一を与える原理があるように思われていました。たとえば，プラトンを筆頭として，デカルト，パスカル，ライプニッツなどは，方法や対象によって数学についての見方や方法論を確立しようと試みました。

数学で用いている諸概念は，それ自身永い間の数学思想の研究成果であって，日常生活で用いている概念からは遥かにかけ離れたものなのです。数，空間，函数などの概念は歴史的に変化し，絶えず拡大され，一般化され，抽象化

されています。たとえば，負数，有理数，無理数，虚数という名前から窺えるように，数概念は抽象の高みへはばたくたびに，わが身に傷痕を生々しく残していきます。

私たちは教科書などで，数学の歴史的な断面だけを見ているため，数学の理論は固定した万古不易のものと一般にうけとられています。ところが，数学は生命力にあふれる有機体のように流動性をもっているのです。厳密な数学の基礎的概念である集合にしても，経験的な物のあつまりの直観的認識からでて，さまざまの属性をきりすてて，類型化されてはじめて抽象的な数学の対象となるのですが，その概念構成の途中に多くの分析すべき過程が残されていて，その立場によって分れるところです。

数学は，物理学その他の自然科学と同じように，自然の多様性と規則性の背後にかくされた基本原理を追求するものです。しかし，数学は現実の量的側面だけをとらえて抽象するので，現実の第一近似といえるものですが，必らずしも最良の近似とは限らないのです。数学は現実の中に感性的な素材をもちますが，諸科学のうちに解消されるものではなく，むしろはっきり区別しなくてはならないのです。

数学はこれまで自然のさまざまの領域で，数の関係，空間の形態などの研究を通して発展し，科学が扱う自然の面の深さに応じて進化してきました。ところが，数学はこれらの数の関係，空間の形態を純粋な形で，内容からきり離して考察するために，数学的真理は厳密になるにしたがって，現実と隔絶する人工的な特性をもち，概念の歴史的起源は忘れられてしまうのです。数学のもつさまざまな特性――，たとえば，完全性，確実性，有効性とともに単調さ，無味乾燥など――は上のような事情からくるのです。

数学の性格は知識であるより，むしろ論理であり技術であります。しかも，内容が乏しいために，その性格はあらゆる方向に柔軟性があって，しばしば鋭く現われるで，人々にまるで魔術のような幻想を起させます。数学を用いることは対象を一面的に扱うということで，必らずしも精密になることではありません。現代における電子計算機への過信はこの点をよく物語るものといえましょう。

2

数学の現状と将来を見通し，研究の方向を見定めるには，数学の歴史の検討

が必要であり，これを第一の指針としなければなりません。

上にのべましたように，数学の歴史の上で，科学が自然の内奥にどの程度に深く食い入ったかに応じて，三つの転換期をあげることができます。

第一は，ユークリッド幾何学に代表される，ギリシャ科学の形成期であり，

第二は，ガリレイからニュートンに到る近代科学の形成期であり，

第三は，ニュートン力学的世界像をうち破って，相対論と量子論を樹立する時期であります。

これらの時期には，論証の表現形式，厳密性の基準，数学的概念に対する直観および数学の構造など，一口にいえば，数学におけるあらゆる秩序が変革されるのです。ここでは，主に第三の転換期，すなわち現代数学の新しい秩序の特性についてお話しようと思います。

ここで，シェークスピアの「アントニーとクレオパトラ」の魔法的な場面を思い出してみるのも無駄ではないでしょう。「世界の運命を決すべき戦いの前夜，アントニーの陣営の闇の空に，神秘な楽の音が聞えてきました。笛の音，歌声。ディオニソスの神々の人間の眼にはみえない行列の楽の音で，古い世界の神々がアントニーの陣営から去っていく行列の楽の音なのです。神々は新たな秩序に移っていったのです。」

19世紀の数学史上で最大事件は，非ユークリッド幾何学の発見と集合論の創始とであります。これによって，数学の最も基本的な概念の認識が変革を迫られるとともに，最も根源的で単純な公理から出発して，あらゆる数学を論理的に導き出そうという思想，いわゆる論理主義が盛んになりました。ところが，間もなく古典論理や集合において，パラドックスが指摘され，数学全体の確実性までも疑われるようになりました。まことに，世紀末は数学の歴史における疾風怒濤の時期 (Sturm und Drang Periode) というべきでしょう。

物理学では，19世紀末に近づくにつれて，ニュートン力学を中心とする古典的物理学からの転換を必要とするいろいろな現象が現われてきます。1900年に，ケルヴィン卿は「熱と光の力学的理論の頭上にある19世紀の雲」と題する象徴的な講演をしましたが，この19世紀の雲の中から，量子論と相対論という20世紀の物理学革命が姿を現わしたのです。

ヒルベルトは，ユークリッドの「原論」を詳しく検討して，「幾何学の基礎」(1899)の中で，ユークリッド幾何学の論理構造を明らかにするため，きわめて整理の行届いた公理系を与えました。「原論」では，公理は経験的事実として自明の理とされ，公理が扱う基本的対象や関係は記述的に定義されています。

ヒルベルトは，公理を理論構成の基本原題とするのは勿論ですが，これを仮設以上のものとはしません。公理に表わされる点や直線は直接定義の与えられない無定義元素として，むしろ公理系から間接に規定されるのです。理論全体はそれらの公理系からの純論理的な演繹体系なのです。

これは厳密性の基準のテスト・ケースとなって，証明そのものについての理論（超数学）への道をひらき，さらに公理系の上に理論を論理的に建設する表現形式を生みました。ヒルベルトはこれを公理的思考とよびましたが，この公理主義にとってもっとも重要な問題は，公理系の無矛盾性の証明です。一つの公理系から出てくる多くの結論がどれも矛盾をひきおこさないことを証明するのです。「幾何学の基礎」の中では，幾何学の公理の中に矛盾があれば，実数の算術にも必らず矛盾が存在することを示し，算術の公理の無矛盾性に帰着させています。

1900年，まさに世紀の変り目にあたって，国際数学者会議の席上，ヒルベルトは「数学の諸問題」と題して有名な講演を行って，新しい世紀の数学の目標を示し，数学の今日にいたる発展に極めて大きな影響を与えています。そこには23の問題があげられ，数学がますます多様化していることを示していますが，ヒルベルトは次のようにのべています。「数学が互いに関係のない多くの分野に細分されてしまうのを恐れるべきでしょうか。われわれはそうは考えないし，期待もしません。数学はその発展につれてますます調和と統一のとれたものとなり，これまで関係のなかった分野の間に予期しない関係が見出されるでしょう。数学は単一の学問としての性格を失うどころか，ますます明確に現わすでしょう。」

シーザーの「ガリア戦記」のはじめに，ガリアは三つの領域にわかれるとありますが，数学もこれまでの慣例によって，代数学，幾何学，解析学という分類が踏襲されてきました。現代数学は一見まことに複雑に見えますが，諸分野は内面的に密接なつながりをもち，公理的方法を原理として単一の数学を建築的に構成しようとする方向へ動いています。このため，従来の分類を固定的に考えるのは，現代数学の単一的性格とは相容れない不合理な考え方です。

3

数学は全体として一つの統一体をなして，きわめて建築的な構成をもっています。しかし，そこにしばしば重層的構造がみられるため，いく重にも重なり

合った数学的事実から論理的な立場をつくるには，予めこれらの関連を鋭く深く見通して統一的な基盤をつくり出す感知力（Spürkraft）を必要とします。

数学における論理と直観は，ポアンカレによれば，お互いに平衡錘（contrepoids）をなしています。証明するのは論理によりますが，発見するのは直観によるのであり，論理は目的に到達する道がどれであるかを教えはしません。それを見つけるには目的を遠くから見なければならないのですが，このような全体を見渡す力は直観なのです。

数学の発展は，しばしば各部分の予期しない接触によっています。直観というのは把えにくいものですが，数学の創造活動の中では，この生命力あふれる要因は絶えず働いています。その中で誰でもよく知っているのは幾何学的直観でしょう。解析学の演習問題を幾何学的な形に直して解決の道を発見するのはこのためです。それどころか，幾何学の大きな特徴は，感覚が知性を助けて，解析学の枠内では決して意識されることがないような，新しい問題を発見することであります。

まことに，現代数学の多くの分野の進歩は，幾何学——微分幾何学，代数幾何学，位相幾何学など——の中から生まれたものか，あるいは派生したものなのです。幾何学と数学諸分野との関連は，いうまでもなく多様で単純ではありませんが，幾何学は研究領域全体を見通して，そこに含まれている多様な思想とさまざまな新しい問題をたやすく洞察させてくれるのです。

位相幾何学の例をとって見ましょう。これは幾何学の中で最も若い分野ですが，直観と論理の間の緊張が極めて実り多いことを示す良い例になっています。位相幾何学では，量の大きさを測ることを抽象し，例えば，曲線ＡＢＣ上でＢがＡとＣの間にあるかどうかだけに注目し，弧ＡＢが弧ＢＣに等しいとか，どちらが大きいとかは問題にしない。これらの定理はまったく質的なものとなり，もとの図形の代りに旅行用の概念図のような図形をとっても，直線が曲線になろうと定理は正しいのです。

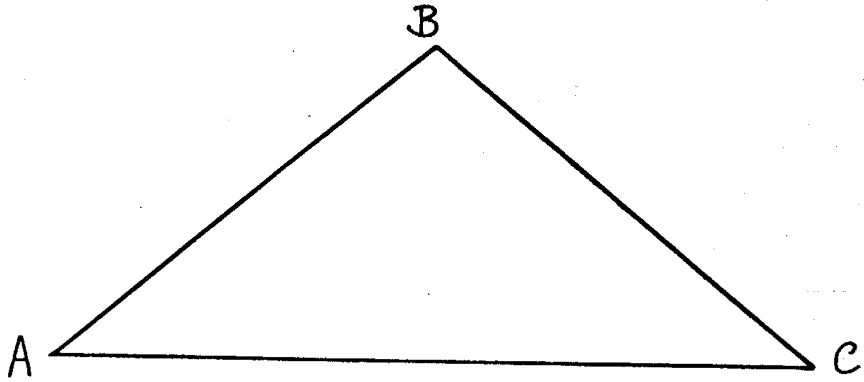
位相幾何学は始めのうちは，曲面を切ったり貼ったりして，専ら幾何学的直観にたよって，曲面の連續な変形で変らない性質を扱ってきました。ところが，曲線，曲面などですら，新しい秩序にしたがって集合論の基盤の上に厳密に基礎づけようとすると，たちまち予想外の奇妙な現象が現われるのです。たとえば，長さをもたない曲線，どの点も接線をもたない曲線，さらに（曲線は線状をなすものと考えられているのに），正方形を完全にうめつくす曲線などが見出されました。こういう現象のために，曲面の複雑な変形を許す位相的な

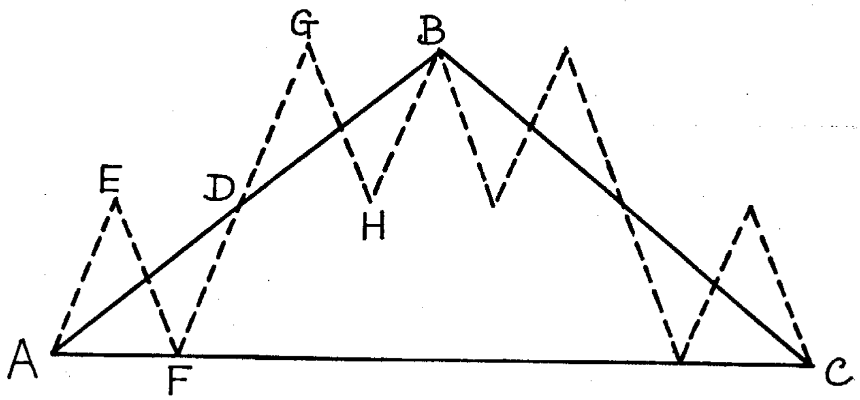
扱い方には周到な注意を要することがわかります。この困難こそは，上にのべた新しい秩序への過渡期における，連続概念が提起する矛盾にほかなりません。

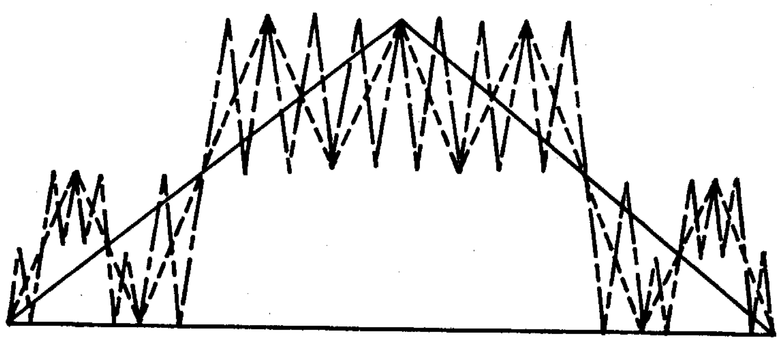
素朴な意味では，誰でも連続とは何かを知っていて，滑らかな曲線のイメージをもっています。ところが，現代数学を学び始めると，連続概念についてのこの粗雑な直観と解析学の論理が完全に適合しなくなり，これまでもっていた直観が役立たなくなるために困惑するのですが，これは学習過程に必らず通過すべき認識の順序というべきものです。

最後に，曲線についての従来の直観では理解しにくいパターンの端緒となった二，三の曲線を，幾何学的に構成する方法を示しておきます。これは，より高い直観への足がかりを与えるものです。

1　接線をもたない曲線







［図の説明］

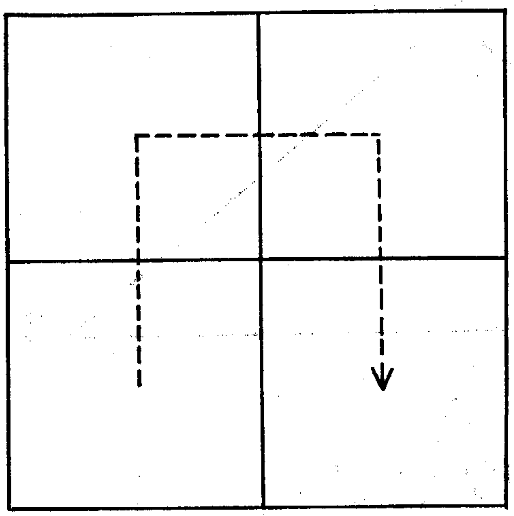
1）第1の折線：青色の折線ＡＢＣ（図1－1）。

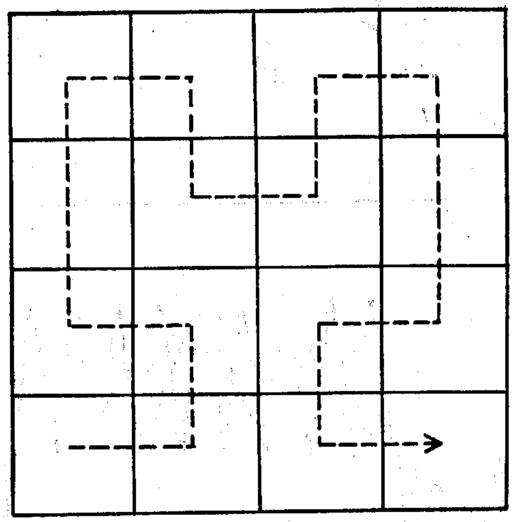
2）第2の折線：ＡＢを二等分して，ＡＤ，ＤＢとし，これらを赤色の稲妻型の折線ＡＥＦＤと折線ＤＧＨＢでそれぞれおきかえる（図1－2）。ＢＣについても同じようにします。

3）第3の折線：第2の折線を構成する線分に対して上と同じような手続きで更に細かい緑色の折線をつくります（図1－3）。

4）こういう手続きを順次くりかえして，極限の曲線をとれば，どの点も接線をもたない曲線となるのです。

2　正方形をうめつくす曲線





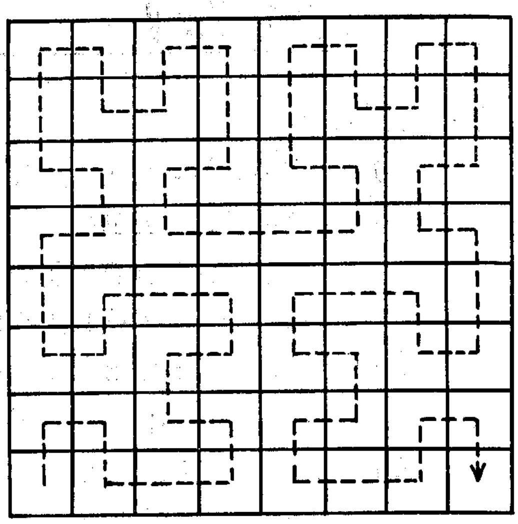
［図の説明］

1）第1の折線：正方形を四等分し，各正方形の中心を順次結んだ折線（図2－1）。

2）第2の折線：これらの正方形をさらに四等分し，その中心を順次に結んだ折線をつくる（図2－2）。

3）第3の折線：さらに各正方形を四等分して，その中心を折線で結ぶ（図2－3）。

4）このような手続きをくりかえして，極限の曲線をとればよいのです。



3　3国が境界を共有する例

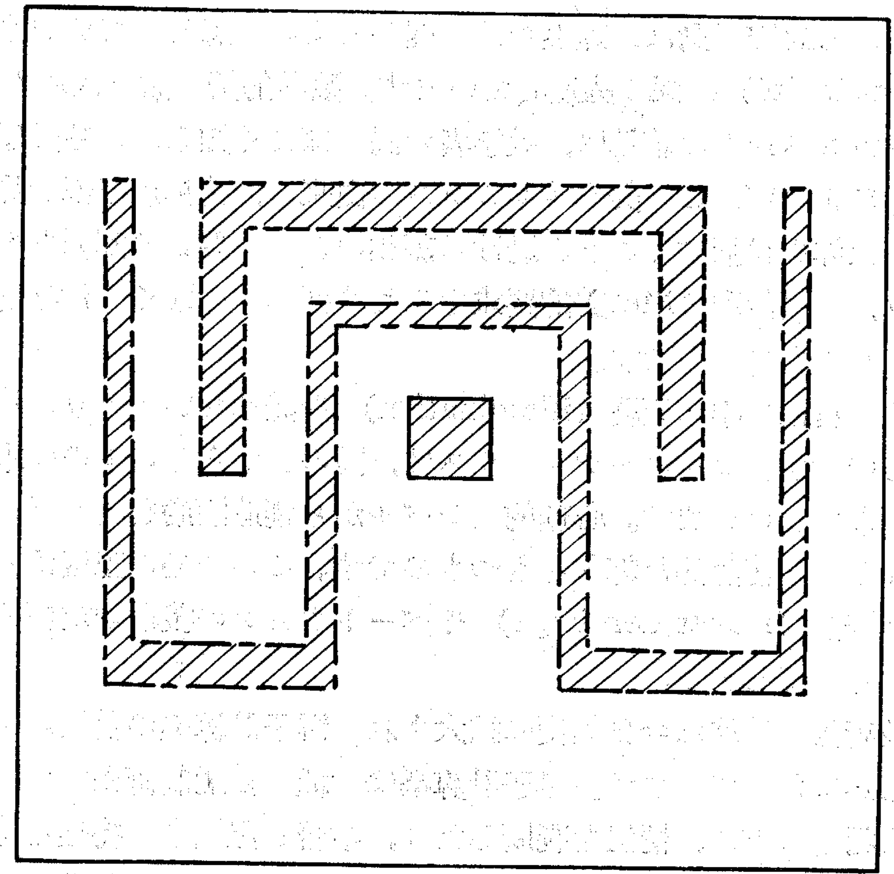


図3—1

［図の説明］

3国をそれぞれ青，赤，緑の色で表わすことにして，まず，正方形の中央に青色の正方形をとります。次に，これを囲むようにして赤色のコの字型の領域をとります。さらに，これらの中間に緑色の領域をつくります（図3—1）。

これをもとにして，まず青色の領地を拡張するのですが，赤と緑の国の中間に青色の領域をつくり，最初の青色の領域を囲んでしまい，これらを青色の領土とします（図3—2）。同じことを赤色，緑色の領域について行い，再び青色，赤色，緑色の順序でかわるがわる領土を拡張します。その極限をとればよいのです。

4

数学における研究活動は，理性だけに関わるものと思われていますが，実は感受性 (sensibilité) に深く関連しています。数学的美，数と図形の調和，幾何学的エレガンスなどの感覚は，数学者の間ではよく知られた審美感覚です。ポアンカレによれば，この美やエレガンスの由来は，精神が細部を見通すばかりでなく，全体を総括することを助ける調和のとれた要素の配列をもつ数学的対象であり，この調和は単に美的要求をみたすばかりでなく，数学的法則を予知させるようなものなのです。

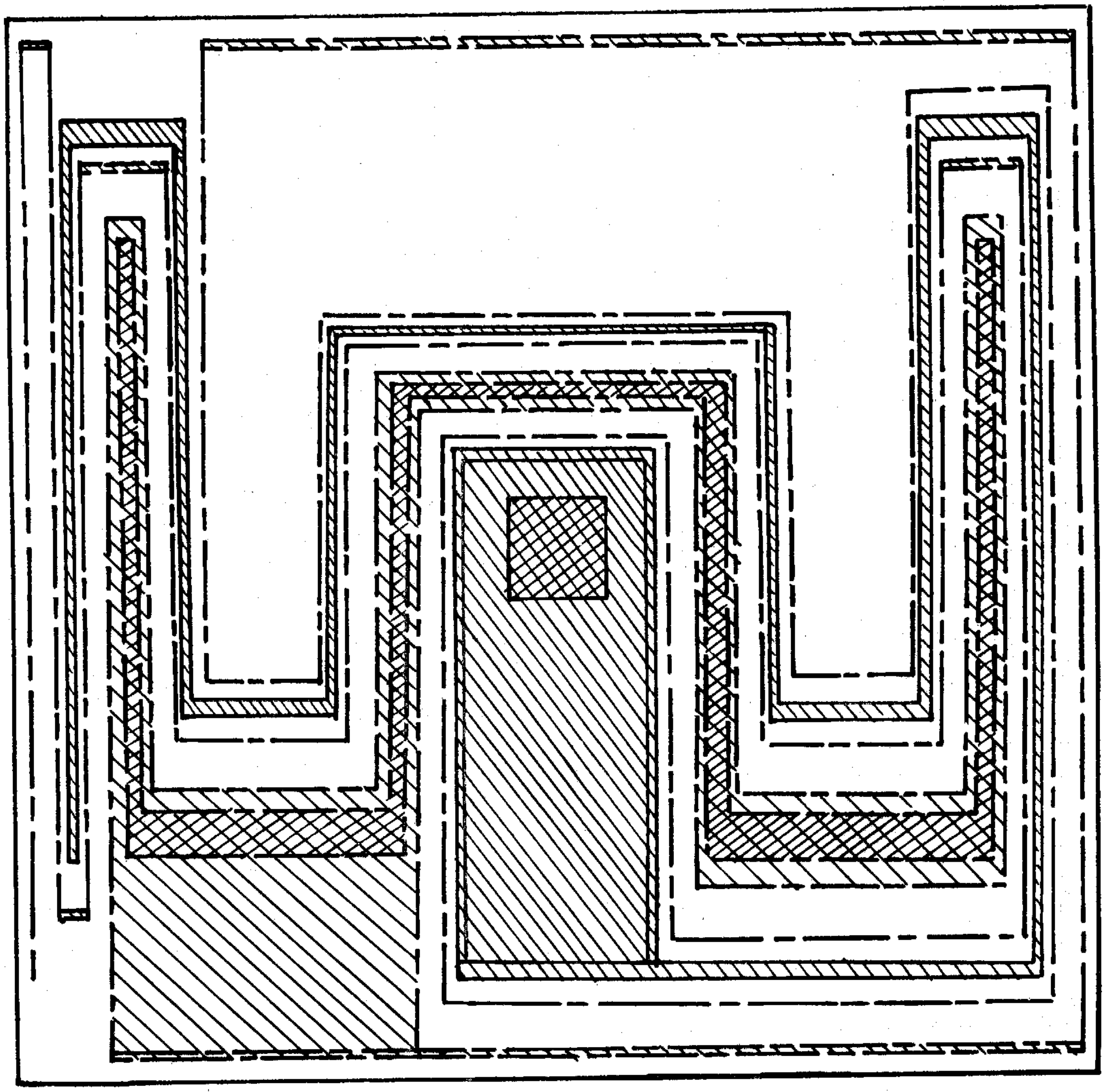
数学的美は自己の中に天啓 (illuminaticn) を感じないかぎり，決して理解されないものです。ワイエルシュトラスは，詩のわからないものは本当の数学者とはいえないといいます。心理的なレベルから創造活動をみれば，数学は詩のような美しさと情熱的な輝きをもつものです。この夢幻の王国はバッハの「フーガの技法」(Kunst der Fuge) やベートヴェンの後期四重奏曲の世界に較べられるものでしょう。

数学の技術的な性格は今日極度に拡大され，電子計算機の普及によって誰の眼にも明らかになっています。電子計算機は一種の自動制御機械で，幼稚ながら思考の代行をつとめ，情況を判断したり，学習し記覚する特性をもっています。これは多様な数学的思考の中では，かなり単純な機械的思考にすぎませんが，わずか20年足らずの間に社会生活に大きな変革をもたらし，今後もますます深刻な影響を及ぼすにちがいありません。

かつて，17，8 世紀にデカルトやラ・メトリーは生物や人間までも機械と較べようとする大胆な見方を試みましたが，現代数学は精密科学の枠をはるかに越えて，あらゆる科学の領域にテクノロジーとして浸透しています。この情況は，機能だけを重視しようとする新しい人間機械論につながる危険を孕んでいます。

数学者の自由な創造力は決して機械的過程で代行することはできません。真に価値のある結果は，計算を捏ねまわしたり，事物に秩序を与えるだけでは十分ではありません。予期しない秩序にこそ価値があるのであって，機械は材料をこなすことはできても，事物の本質はいつも失われるものです。ポアンカレのいうように，発見とは選択であり，識別なのです。

数学と人間との関わりは，人間の思考という精神活動の最も基本的なレベルで把えられるべきであります。それは数学の論理であると同時に，数学とヒュ



ーマニズムの問題にほかなりません。この問題は，数学特有の極めて柔軟で多様な性格のため，今までのところ未だ十分な研究がなされておりません。

数学の魅力は，何よりもその永遠の若さにあると思います。

最後に，面倒な図を描いて協力して下さった近藤葉子，塩路裕子の御両人に御礼を申し上げます。大変粗雑な話でありますが，御静聴を感謝致します。

*　　*　　*

もっと詳しく知りたい方は，次の本を御覧下さい。

1　近藤洋逸編「数学の歴史」，（毎日新聞社）。

2　静間良次「数学における連続の問題」
（武谷三男編「自然科学概論」第2巻，（勁草書房）所収）。

3　ポアンカレ，静間良次訳「科学と仮説」
ヒルベルト，静間良次訳「公理的思考」
（湯川秀樹，井上健編「現代の科学」世界の名著，（中央公論社）所収）。

4　ポアンカレ，吉田洋一訳「科学と方法」（岩波文庫）
ポアンカレ，田 辺 元 訳「科学の価値」（岩波文庫）

5　ヒルベルト，一 松 信 訳「数学の問題」（共立出版）

（1970年5月8日）